ぼくのかんがえたさいきょうのふとうしき

75 回生　安部 健士朗

2021 年 4 月 10 日

はじめに

こんにちは. 75 回生の安部です. 好きなものは Hilbert 空間です. この記事は, 等周不等式が好きな筆者が, 等周不等式っぽい不等式を発見したので, それの証明などを書いていこうというものです. まず, なぜ筆者が等周不等式を好きかというと, 少し考えるとちょっと難しいような感じがする式であるにもかかわらず, かなり自明な Brunn-Minkowski の不等式によってすぐに証明できてしまうからです. すごくないですか? さて, この記事は, 大学数学の内容を含んでいます. 大学数学に触れたことのない中高生にも分かるように書くつもりだったのですが, 残念ながら筆者の怠慢, また能力不足のため期限に押され, 基礎的なところは全く解説することが出来ませんでした. したがって, この記事では, 初等的な微積分, 実解析学の基本を既知とします.

なお, これ以降の議論は全て $\mathbb{R}^2$ においてのみ考えるので, 例えば $\mathbb{R}^2$ における A を考えるときに $A \subset \mathbb{R}^2$ とは書きません. しかし, 実数 r を, $r \in \mathbb{R}$ と書くなどはするかもしれません.

本題

1　等周不等式

まず等周不等式とは何かを説明します. 等周不等式は, ” 曲線の長さを一定にしたときにそれに囲まれる図形の面積はその曲線が円であるときに最大となり, かつ最大となるのは円のときのみである” という事実を表すものです. (不等式がそれの全てを語るわけではありませんが, 証明する過程において等号成立条件などを確かめれば分かります. また, 曲線が求長可能でないときでも同様の結果を与えることもできます.) その証明に用い (, また本題の不等式の証明にも用い) る命題を書いておきます.

定理 1.1 (Brunn-Minkowski の不等式) $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$ と表す.

$$m(A+B)^{\frac{1}{2}} \geq m(A)^{\frac{1}{2}} + m(B)^{\frac{1}{2}}$$

等号が成立するのは, B が A の定数倍の相似拡大, 平行移動, またはそれらの合成であるときに限る.

証明 略

定理 1.2 (等周不等式) Γ を求長可能な単一閉曲線, Ω を Γ に限られた単連結領域とする (これは Jordan の曲線定理により保証されている.). このとき,

$$m(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi} l(\Gamma)^2$$

証明 minkowski 容量というものを導入していろいろやったらできます. まあまあ技巧的だと思います. しかしこれ以降関係ないので省略します. (これを書いていたら提出に間に合いません... すいません)

2 ふとうしき

下が, ぼくのかんがえたさいきょうのふとうしきです. 名付けて, ” 等外への距離平均不等式”. 読み方は, ” とうそとへのきょりへいきんふとうしき” です. かっこいい名前ですね.

定理 2.1 A を有界領域とする.

$$m(A) \geq 9\pi \left(\frac{1}{m(A)} \int_A d(x, A^c) dx \right)^2$$

等号は A が開円板であるときに限り成立する.

たしかに直観的にそんな感じがしますね. 面積を一定にして周をぐにゃぐにゃ曲げたりすることを考えると, 膨らませる分へこませなければいけず, へこませると多くの部分で外への距離が小さくなりそうだからです. では, 証明していきましょう. 補題をいくつか用意します.

補題 2.2 ∂A が求長可能な単一閉曲線であるとき, 任意の $r>0$ について $\partial(A+B_r(\mathbf{0}))$ は求長可能で,

$$l(\partial(A+B_r(\mathbf{0})) \leq l(\partial A) + 2\pi r$$

また, A が凸集合ならば等号が成立する.

自明な感じがしますね. しかし証明は結構難しいと思います.

証明 ①凸多角形 →②一般の多角形 →③一般の周が求長可能な領域の順で示していきます.

①これは明らかでしょう.

②これは自明に見えますが実はなかなか難しそうですね. r が十分に小さいときと十分に大きいときに成り立つことはわりとすぐに分かりますね. 大きいときは明らかで, 小さいときは $0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta > \theta$ から分かります. 小さくも大きくもない場合は線が複雑に重

なりあって分かりにくい気がしますが, がんばって想像してみましょう. まず r を十分に小さくとり, r を少しだけ大きく変化させることを考えましょう. これで明らかですね.

③②から明らかです.

補題 2.3 ∂A が求長可能で f が $(A+B_\delta(\mathbf{0}))-A$ 上で可積分であるとき,

$$\int_{(A+B_\delta(\mathbf{0}))-A} f dm_2(x) = \int_0^\delta \int_{\partial(A+B_r(\mathbf{0}))} f dm_1(x) dr$$

証明 極座標公式を導くのと同様のやり方で導けます.

定理 2.1 の証明 まず A を求長可能な単一閉曲線に限られた凸領域に限ります. $m(A)$ を固定したうえで, 任意に A を取ります. $\frac{1}{m(A)}\int_A d(x,A^c)dx = L(A)$ とおきます. $A = A_0$ とします. また, A_0 に応じて適当な $\delta > 0$ を取り, $A_1 = A_0 + B_\delta(\mathbf{0})$ と表します. $A_2 = \left\{\frac{m(A_0)}{m(A_1)}\right\} A_1$ とします.

$$\begin{aligned}
L(A_2) &= \left\{\frac{m(A_0)}{m(A_1)}\right\}^{\frac{1}{2}} L(A_1) \\
&\geq \left\{\frac{m(A_0)}{m(A_1)}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{m(A_0)(L(A_0)+\delta) + \int_0^\delta (l(\partial A_0)+2\pi r)(\delta - r)dr}{m(A_0) + \int_0^\delta (l(\partial A_0)+2\pi r)dr} \\
&= \left\{\frac{m(A_0)}{m(A_0)+l(\partial A_0)\delta + \pi\delta^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{m(A_0)(L(A_0)+\delta) + \frac{1}{2}l(\partial A_0)\delta^2 + \frac{1}{3}\pi\delta^3}{m(A_0)+l(\partial A_0)\delta+\pi\delta^2}
\end{aligned}$$

δ に関して 2 次までべき級数展開して (明らかに解析関数です.)$1 > \frac{3L(A_0)l(\partial A_0)}{2m(A_0)}$ と 1 次の係数が正ならば上の不等式から δ が十分に小さいとき $L(A_2) \geq L(A_0)$ が成立することが分かり, 0 ならば 2 次の係数が, 円のとき 0, 円でないとき正で, A_0 が凸であるので $1 \geq \frac{3L(A_0)l(\partial A_0)}{2m(A_0)}$ が成立し, 円でない場合は真で, 円のときに真であることは明らかです.

$$\begin{aligned}
l(\partial A_2) &= \left\{\frac{m(A_0)}{m(A_1)}\right\}^{\frac{1}{2}} l(\partial A_1) \\
&\leq \left\{1 - \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\delta}{(m(A_0+B_\delta(\mathbf{0})))^{\frac{1}{2}}}\right\}(l(\partial A_0)+2\pi\delta) \\
&\leq \left\{1 - \frac{2\pi\delta}{l(\partial A_0)+2\pi\delta}\right\}(l(\partial A_0)+2\pi\delta) \\
&= l(\partial A_0)
\end{aligned}$$

が成立するので, 何回か繰り返してやることで, 任意の $\delta > 0$ について $L(A_2) \geq L(A_0)$ が成立することがわかります. 非凸な場合は切って押さえることによって, 示せます. よって任意の凸な有界領域 A_0 についても, $L(A_2) \geq L(A_0)$ が成立することが分かります. あとはいろいろやって適当に評価すると示せます.

おわりに

このような雑な記事を読んでいただきありがとうございました, というかこんな雑な記事を書いてすいません. 先延ばしにし続けた結果, 提出期限を過ぎてしまって有界領域に限定してしまいましたが, おそらくは容易に非有界な場合にも拡張でき, また, ルベーグ可測性にまで条件を緩めても成り立つことはほぼ自明に予想されますね. この不等式はまあ言ってしまえば数学的にはほとんど価値がない結果だと思います. 何に使うねんって話ですし. Fermat の最終定理以上に使い道がない定理だと思います. 数学的に価値があるような研究みたいなこともしてみたいのですが, なかなか時間と知識的に厳しいです (高校生レベルが簡単に思いつくことなんてすでに先行研究が大量にありそう). しかし, 来年が最後なので余裕があればそれっぽいこともやってみたいと思います. 最後に読み返してみましたが少し行間が広い気がしますね. まあでも省略している議論は実解析などでは頻繁に出てくる考え方なのでまあいいですかね.

最後に, $L(A_2)$ を評価する式を級数展開する計算力がない筆者のためにプログラムを書いて計算してくれた 75 回生の N 君に深く感謝します.